

**MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale**

*Partie I : Informatique théorique*

Marc Chemillier

Cette partie sera rédigée sur une copie à part. Elle est notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

**Question 1**

- 1a-** Calculer l'oracle des facteurs du mot  $u = abaabb$ .  
**1b-** Donner pour chaque état  $p$  le plus long suffixe de  $u_1 \dots u_p$  qui soit répété à gauche.  
**1c-** Existe-t-il des mots reconnus non facteurs de  $u$ ? Donner la table de transition de l'oracle en indiquant les relations correspondant à  $a$ ,  $b$  et aux mots  $ab$  et  $aabb$ .

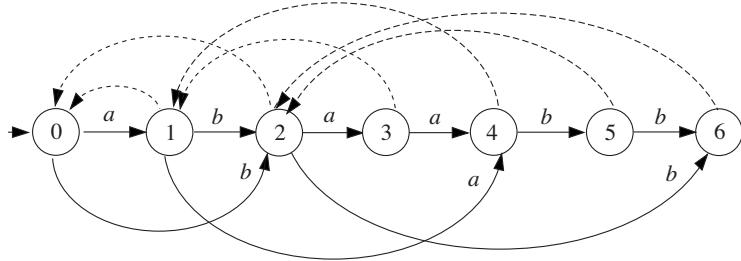
**Question 2**

- 2a-** Donner la factorisation du mot  $x = abcaacbacaab$  en suite de mots de Lyndon décroissante pour l'ordre alphabétique.  
**2b-** Existe-t-il des suffixes du mot  $x$  qui sont inférieurs à  $x$  pour l'ordre alphabétique ? Si oui lesquels ?  
**2c-** Pour chacun des mots de Lyndon  $u$  intervenant dans la décomposition de  $x$ , on pose la même question : existe-t-il des suffixes de  $u$  inférieurs à  $u$ ? Que remarque-t-on ?

**Question 3**

On rappelle qu'un mot  $w = w_0w_1\dots w_{n-1}$  sur l'alphabet des entiers est une *chaîne euclidienne* s'il existe  $d$  tel que  $t(w) = \delta^d(w)$  où l'application  $t$  consiste à ajouter 1 à la première lettre et à retrancher 1 à la dernière :  $t(w) = (w_0+1)w_1\dots (w_{n-1}-1)$ .  
Montrer que pour l'ordre alphabétique,  $w$  est inférieur à  $\delta^d(w)$  et que  $\delta^d(w)$  est supérieur à  $\delta^{i+d}(w)$  pour tout entier  $1 \leq i \leq n-1$ .

### Réponse1a



### Réponse1b

$p = 0$  suffixe répété =  $\epsilon$

$p = 1$  suffixe répété =  $\epsilon$

$p = 2$  suffixe répété =  $\epsilon$

$p = 3$  suffixe répété =  $a$

$p = 4$  suffixe répété =  $a$

$p = 5$  suffixe répété =  $ab$

$p = 6$  suffixe répété =  $b$

### Réponse1c

pas de mot reconnu non facteur

	0	1	2	3	4	5	6
$a$	1	4	3	4			
$b$	2	2	6		5	6	
$ab$	2	5		5			
$aabb$	6		6				

### Réponse2a

$x = (abc)(aacbac)(aab)$  avec  $abc \geq aacbac \geq aab$

### Réponse2b

$aacbacaab, aab$  et  $ab \leq abcaacbacaab$

### Réponse2c

Non, tous les mots de Lyndon sont inférieurs à tous leurs suffixes.

### Réponse3

$w_0 < w_0 + 1$ , donc  $w <_{\text{alpha}} t(w) = \delta^d(w)$

Pour  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\delta^i(w) = w_i \dots w_{n-1} w_0 w_1 \dots w_{i-1}$

et  $\delta^{i+d}(w) = \delta^i(\delta^d(w)) = \delta^i(t(w)) = w_i \dots (w_{n-1}-1)(w_0+1)w_1 \dots w_{i-1}$

Comme  $w_{n-1} > w_{n-1}-1$ , il vient  $\delta^i(w) >_{\text{alpha}} \delta^{i+d}(w)$