Master ATIAM – 25 février 2010

MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

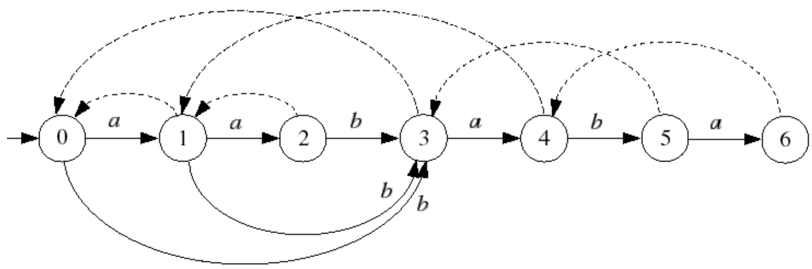
Partie I : Informatique théorique

Marc Chemillier

Cette partie sera rédigée sur une copie à part. Elle est notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1

On considère l'oracle du mot u = *aababa* (tous les états sont terminaux).



1a- Pour chaque état p de 1 à 6, donner le préfixe correspondant de u noté $u(p)$, et le plus long suffixe de $u(p)$ répété strictement à gauche.
1b- Donner le mot v correspondant au chemin suivant utilisant les liens suffixiels 0 -> 1 -> 2 -> 3 -> 4 -> 1 -> 2 -> 3 -> 4 -> 5 ? On note $F_u(v)$ l'ensemble des facteurs de v <u>qui sont aussi facteurs de u</u>. Un élément est *maximal pour l'ordre facteur* dans $F_u(v)$ s'il n'est facteur d'aucun autre élément de $F_u(v)$. Montrer que $F_u(v)$ contient deux éléments maximaux [**erreur d'énoncé** : un seul élément maximal].
1c- Donner les facteurs de u de longueur 2, 3, 4, 5 et 6, et en déduire la liste des quatorze éléments du monoïde N des relations sur les états de l'oracle engendré par a et b [on n'oubliera pas la relation vide et l'identité Id]. Quels sont les éléments absorbants de N (tels que $ox = xo = o$ pour tout x) ? Quels sont ses éléments idempotents (tels que $e^2 = e$) ? Un mot reconnu par l'oracle peut-il engendrer un idempotent de N ?

Question 2

2a- Soit le mot x = *aababbaaba*. Donner le mot de Lyndon correspondant [= minimal pour l'ordre alphabétique parmi les permutations circulaires de x] ? Donner une décomposition de x en trois mots de Lyndon $x = u_1u_2u_3$ tels que $u_1 \geq u_2 \geq u_3$.
2b- Tous les mots de Lyndon vérifient la propriété suivante : si x et y sont des mots de Lyndon tels que $x < y$ pour l'ordre alphabétique, alors xy est aussi un mot de Lyndon.
En déduire que pour tout mot x quelconque, si $x = u_1 \ldots u_n$ est une décomposition de x en mots de Lyndon telle que n soit minimal, alors $u_1 \geq \ldots \geq u_n$ pour l'ordre alphabétique.

Question 3

3a- Soit le mot de Christoffel u = *xxyxxyxxyxy*. Donner les valeurs de p et q correspondant à sa pente p/q (avec p vertical, q horizontal).
3b- Donner le mot de Christoffel dual [on rappelle qu'il s'agit du mot de pente p^*/q^* où p^* et q^* sont les inverses de p et q dans $\mathbf{Z}/(p+q)\mathbf{Z}$].
3c- Donner la décomposition de u sous la forme $x(r)xy(s)y$ où les trois mots r, s et $rxys$ sont des palindromes. Même question pour son dual.

Réponse1a
1=vide, 2=a, 3=vide, 4=a, 5=ab, 6=aba

Réponse1b
$v = (aaba)(abab)$, $u = aababa$
$F_u(v) = \{a, b, aa, ab, ba, aab, aba, bab, aaba, abab, \underline{aabab}\}$
Un seul élément maximal : *aabab* [**erreur d'énoncé**, tous les autres sont facteurs de *aabab*]

Réponse1c
14 éléments du monoïde :
aa, ab, ba,
aab, aba, bab,
aaba, abab, baba,
aabab, ababa,
aababa
o, Id
absorbant : *o*, idempotent : *o*, Id

Réponse1d
Un mot de L ne peut engendrer un idempotent, car L est fini
idempotent dans $L \Rightarrow x = x_1 \ldots x_n$, $\varphi(x_i) = e \Rightarrow \varphi(x) = e$, $x \in \varphi^{-1}(\varphi(L) = L$
$\Rightarrow L$ contient $\varphi^{-1}(e)^*$ infini.
absorbant dans L : $x = uzv$, $\varphi(x) = \varphi(u)o\varphi(v) = o$, donc $x \in \varphi^{-1}(\varphi(L) = L$, $\Sigma^*\varphi^{-1}(o)\Sigma^*$ dans L.

Réponse2a
Mot de Lyndon *aaababbaab*, décomposition $x = (aababb)(aab)(a)$

Réponse2b
décomposition avec nombre minimal n, supp. $u_i < u_{i+1}$, alors $u_i u_{i+1}$ Lyndon, donc n pas minimal

Réponse3a
Pente 4/7

Réponse3b
$4 \times 3 = 12 \approx 1 \bmod 11$, donc $p^* = 3$
$7 \times 8 = 56 \approx 1 \bmod 11$, donc $q^* = 8$
dual = *xxxyxxxyxxy*

Réponse3c
palindromes : $x(xyxxyx)xy(x)y$
$x(xxyxx)xy(xx)y$