Master ATIAM – 27 février 2008

MMIM : Méthodes mathématiques pour l'informatique musicale

Partie I : Informatique théorique

Marc Chemillier

Cette partie sera notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

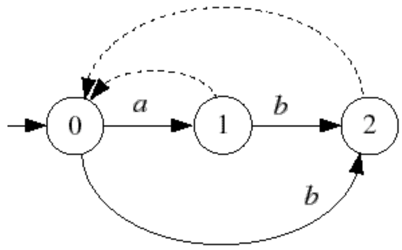
Question 1

1a- Soit le mot $u = bbabbbabba$. En utilisant la construction vue en cours, calculer le mot sur l'alphabet $\{2, 3\}$ correspondant au rythme asymétrique associé à u. On rappelle que les transformations a et b s'appliquent au couple $(\varepsilon, \varepsilon)$ en commençant <u>par la droite</u>.

1b- Donner le mot de Lyndon de la classe de conjugaison de u. Donner une factorisation de u sous la forme $u = xy$ où x et y sont deux mots de Lyndon tels que x est plus petit que y pour l'ordre alphabétique. Combien y a-t-il de factorisations de ce type ?

Question 2

2a- On considère l'oracle des suffixes du mot *ab*.



Donner sa table de transition (on mettra $\varnothing$ si une lettre ne peut pas être lue à partir d'un état) et compléter la table avec les mots de longueur 2.

2b- En déduire la liste des éléments distincts du monoïde des relations sur les états $\{0, 1, 2\}$ engendré par a et b. On dit qu'un élément o d'un monoïde est *absorbant* si $ox = xo = o$ pour tout x. Montrer dans le cas général qu'il ne peut pas exister deux éléments absorbants distincts. Dans la liste des éléments du monoïde précédent, indiquer l'élément absorbant.

2c- Compléter l'automate ci-dessus pour obtenir l'oracle des suffixes du mot *abaab*.

2d- Donner une factorisation du mot $u = baaabaab$ en trois mots $u = xyz$ tels que chacun est l'étiquette d'un chemin dans l'automate et que l'on passe de l'état d'arrivée de l'un à l'état de départ du suivant en passant par une flèche des liens suffixiels.

Question 3

On rappelle que si u est un mot infini, on note $P(u, n)$ le nombre de facteurs de u de longueur n. Donner une inégalité sur $P(u, n + 1)$ et $P(u, n)$. Un mot u est *sturmien* si $P(u, n) = n + 1$ pour tout n. Déduire dans ce cas une relation précise entre $P(u, n + 1)$ et $P(u, n)$.

Réponse1a
2323232322323

Réponse1b
mot de Lyndon = (*abb*)(*abbabbb*) avec $abb < abbabbb$
1 seule factorisation de ce type

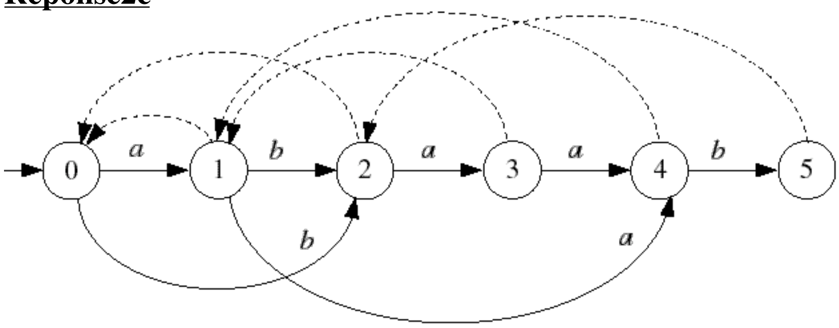
Réponse2a

	0	1	2
a	1	$\varnothing$	$\varnothing$
b	2	2	$\varnothing$
a^2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
ab	2	$\varnothing$	$\varnothing$
ba	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
b^2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Réponse2b
monoïde = $\{a, b, a^2, ab, \mathrm{Id}\}$
si 2 éléments sont absorbants o_1 et o_2 :
o_1 absorbant => $o_1o_2 = o_1$
o_2 absorbant => $o_1o_2 = o_2$ => $o_1 = o_2$

élément absorbant $o = a^2 = ba = b^2$

Réponse2c



Réponse2d
(*baa*)(*ab*)(*aab*)

Réponse3
cas général : $P(u, n + 1) \geq P(u, n)$
-> tout facteur de long. $n + 1$ a un préfixe facteur de longueur n
cas d'un mot sturmien : $P(u, n + 1) = P(u, n) + 1$